

Problème 323 – Scrat et le gland glissant - Corrigé

1) On a $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n - v_n}{2}$.

Ce qui donne $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{v_n}{2}$.

Or $v_{n+1} = u_n$ donc pour $n \geq 1$, $v_n = u_{n-1}$

Soit $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1}$.

Où encore, pour $n \geq 0$, $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

2) On appelle (P_n) la propriété au rang n : $u_n = 3 \times \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Initialisation :

Pour $n=0$, $3 \times \sum_{k=0}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 3$.

Pour $n=1$, $3 \times \sum_{k=0}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1\right) = 4,5$.

Or $u_0 = 3$

Et en appliquant la relation : $u_1 = u_0 + \frac{u_0 - v_0}{2} = 3 + \frac{3-0}{2} = 4,5$.

Hérédité :

On suppose que (P_n) est vérifiée au rang n et $n+1$. Démontrons (P_n) est vérifiée au rang $n+2$.

On a $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ pour $n \geq 0$.

Par hypothèse de récurrence, on a alors :

$$u_{n+2} = \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

$$\text{Donc } u_{n+2} = \frac{3}{2} \times 3 \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2} \times 3 \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$u_{n+2} = \frac{3}{2} \times 3 \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2} \times 3 \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \times 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$u_{n+2} = \frac{9}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$u_{n+2} = \frac{6}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$u_{n+2} = 3 \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$u_{n+2} = 3 \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$u_{n+2} = 3 \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}.$$

(P_n) est donc vérifiée au rang $n+2$.

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $u_n = 3 \times \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$

3) $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

$$\text{Soit } u_{n+2} - \frac{3}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n = 0.$$

$$\text{Ou } 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + 1u_n = 0.$$

On pose l'équation caractéristique : $2r^2 - 3r + 1 = 0$.

Une solution évidente est $r_1 = 1$.

Donc on a par produit des racines : $r_1 \times r_2 = \frac{1}{2}$ donc $r_2 = \frac{1}{2}$.

On a donc : $u_n = \alpha \times 1^n + \beta \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On plus simplement $u_n = \alpha + \beta \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Or $u_0 = 3$ donc $\alpha + \beta \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \alpha + \beta = 3$.

Et $u_1 = 4,5$ donc $\alpha + \beta \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \alpha + \frac{1}{2}\beta = 4,5$.

Par résolution du système, on trouve facilement : $\beta = -3$ et $\alpha = 6$.

Donc $u_n = 6 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (1)

Reprenons l'expression $u_n = 3 \times \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est la somme d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Donc $u_n = 3 \times \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Soit $u_n = 6 - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

$$u_n = 6 - 6 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$u_n = 6 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ce qui nous ramène à l'expression (1).

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} 6 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 6$$

Le gland s'est stabilisé autour de 6 mètres par rapport à la position initiale de Scrat.

5) On reprend la même approche.

On a $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n - v_n}{k}$ avec les mêmes conditions initiales.

De la même manière que précédemment, on démontre que $u_n = 3 \times \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{m}\right)^k$ (par récurrence double, par exemple).

$$\text{Or } \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{m}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{m}} = m \frac{1 - \left(\frac{1}{m}\right)^{n+1}}{m-1} = m \frac{m^{n+1} - 1}{(m-1) \times m^{n+1}}$$

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{m}\right)^k = \frac{m}{m-1} \times \frac{m^{n+1}-1}{m^{n+1}}.$$

$$\text{Donc } u_n = 3 \times \frac{m}{m-1} \times \frac{m^{n+1}-1}{m^{n+1}}.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \times \frac{m}{m-1} \times \frac{m^{n+1}-1}{m^{n+1}} = 3 \times \frac{m}{m-1}.$$

C'est donc bien à $3 \times \frac{m}{m-1}$ mètres du point de départ de Scrat que le gland se serait stabilisé après un très grand nombre de sauts de l'écureuil.